**Лекція №4**

***Нумерації пар і n-ок чисел***

Одну із бієкцій (нумерацій) між *N* та *N*×*N* можна задати наступним чином. Всі пари натуральних чисел розташуємо в послідовність

<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <0, 2>, <1, 1>, <2, 0>, <0, 3>, …

тобто, впорядкуємо всі пари так, що пара <*x*, *y*> йде раніше за пару <*u*, *v*> якщо *x* + *y* < *u* + *v*, або якщо *x* + *y* = *u* + *v* і *x* < *u*.

Бієкцію задаємо співвідношенням

<*x*, *y*> ↔ *n*,

де *n* – номер пари в цій послідовності.

Така бієкція називається нумерацією Кантора пар чисел і позначається ***c***(*x*, *y*), тобто ***c***(*x*, *y*) – це номер пари <*x*, *y*> в послідовності Кантора.

Лівий та правий елементи пари <*x*, *y*> з номером *n* визначають функції ***l***(*n*) і ***r***(*n*), які називаються лівою та правою координатними функціями.

**Теорема 4.1**. Функції ***с***(*x*, *y*), ***l***(*n*), ***r***(*n*) – ПР функції.

Доведення. Функція ***с***(*x*, *y*) обчислюється наступним алгоритмом:

function ***с***(*x*, *y*)

begin

*s* = 0

for *i* = 0 to (*x* + *y*)

*s* = *s* + *i*

for *i* = 0 to (*x* + *y*)

{*j =* (*x + y*)∸ *i*

if *x = i* ∧ *y* = *j* then *k* = *i*}

***с* =** *s* + *k*

end.

Враховуючи, що ***l***(*n*) ≤ *n*, ***r***(*n*) ≤ *n* функція ***l***(*n*) обчислюється алгоритмом:

function ***l***(*n*)

begin

for *i* = 0 to *n*

for *j* = 0 to *n*

if ***с***(*i*, *j*) = *n* then ***l*** = *i*

end,

а функція ***r***(*n*) обчислюється алгоритмом:

function ***r***(*n*)

begin

for *i* = 0 to *n*

for *j* = 0 to *n*

if ***с***(*i*, *j*) = *n* then ***r*** = *j*

end.

Таким чином, ***с***(*x*, *y*), ***l***(*n*) та ***r***(*n*) – ПР функції.

Зазначимо також, що із визначення функцій ***с***(*x*, *y*), ***l***(*n*), ***r***(*n*) випливають наступні співвідношення

***c***(***l***(*n*), ***r***(*n*)) = *n*, ***l***(***c***(*x*, *y*)) = *x*, ***r***(***c***(*x*, *y*)) = *y*.

З допомогою нумерації пар чисел можна одержати нумерацію трійок, четвірок і т. д. натуральних чисел. Для цього вводяться наступні функції

***c***3(*x*1, *x*2, *x*3) = ***c***(***c***(*x*1, *x*2), *x*3)

……………………………

***c****n*+1(*x*1, *x*2, …, *xn*+1) = ***c****n*(***c***(*x*1, *x*2), *x*3, …, *xn*+1).

За визначенням, число ***c****n*(*x*1, *x*2, …, *xn*) називається канторовим номером *n*-ки <*x*1, *x*2, …, *xn*>.

Якщо ***c****n*(*x*1, *x*2, …, *xn*) = *x*, то із тотожностей для ***с***(*x*, *y*), ***l***(*x*), ***r***(*x*), одержимо:

*xn* = ***r***(*x*), *xn*-1 = ***rl***(*x*), …, *x*2 = ***rl***…***l***(*x*), *x*1 = ***ll***…***l***(*x*).

Ввівши позначення ***с****nn*(*x*), …, ***c****n*1(*x*) для правих частин вище приведених рівностей, одержимо:

***c****n*(***с****n*1(*x*), …, ***c****nn*(*x*)) = *x*,

***c****ni*(***c****n*(*x*1, *x*2, … , *xn*)) = *xi* (*i* = 1, …, *n*).

Це аналоги канторової нумерації для *n*-ок чисел.

*Функція Геделя*

Введемо функцію

***Г***(*x*, *y*) = *rest*(***l***(*x*), 1 + (*y* + 1)***r***(*x*)).

Функція Геделя ***Г***(*x*, *y*) дозволяє генерувати довільні скінченні послідовності натуральних чисел згідно наступної властивості цієї функції: для будь-яких чисел *a*0, …, *an* ∈*N* існує *x* таке, що ***Г***(*x*, *i*) = *ai*, *i* = 0, … , *n*.

**Лема.** Для будь-яких взаємно простих чисел *q*, *p* має місце наступне співвідношення: {*rest*(*pi*, *q*) *| i* = 0, … , *q* – 1} = {0, … , *q* – 1}.

Доведення. Для будь-якого числа *x* маємо

0 ≤ *rest*(*x*, *q*) ≤ *q* – 1.

Тому достатньо показати, що для будь-яких 0 ≤ *i* < *j* ≤ *q* – 1 виконується нерівність *rest*(*pi*, *q*) ≠ *rest*(*pj*, *q*). Допустимо противне. Тоді *p*⋅*j* – *p*⋅*i* ділиться на *q*. Отже, *j* – *i* ділиться на *q*, а це не так (*j* – *i* ≤ *q* – 1).

**Теорема 4.2** (китайська теорема про остачі). Для будь-яких попарно простих чисел *p*1, … , *ps*і натуральних чисел *a*1, … , *as*таких, що *ai* < *pi*, *i* = 1, … , *s* існує натуральне число *М* < *p*1×… ×*ps* таке, що rest (*M*, *pi*) = *ai* для всіх *i* = 1, … , *s*.

Доведення (індукцією по *s*).

1. Нехай *s* = 2. За попередньою лемою існують числа *n* < *p*1, *m* < *p*2 такі, що

*rest*(*p*1⋅*m*, *p*2) = *a*2, *rest*(*p*2⋅*n*, *p*1) = *a*1.

Нехай *M*′= *p*1⋅*m* + *p*2⋅*n* і *M*0 = *rest*(*M*', *p*1⋅*p*2). Тоді *М*0 – шукане бо, *М*0 < *p*1⋅*p*2 і *rest*(*M*0, *p*1) = *a*1, *rest*(*M*0,*p*2) = *a*2 (*M*′ = *k*⋅*p*1⋅*p*2 + *M*0 для деякого *k*, а отже *rest*(*M*0, *p*1) = *rest*(*M*′– *k*⋅*p*1⋅*p*2, *p*1) = *rest*(*M*′, *p*1) = *rest*(*p*2⋅*n*, *p*1) = *а*1).

2. Нехай твердження леми вірне для *s* ≤ *m*. Покажемо, що воно вірне і для *s* = *m* + 1.

Маємо натуральні *a*1,…, *as*+1  та попарно прості *p*1, … , *ps*+1 такі, що *ai* < *pi*, *i* = 1, … , *s* + 1.

Покладемо, *p*′1 = *p*1⋅*p*2, *p*′*i*= *pi*+1, *a*′1 = *M*0, *a*′*i*= *ai*+1, *i* = 2, … , *s*. Тоді *p*′1 ,..., *p*′*s*попарно прості та *a*′*i* < *p*′*i* для всіх *i* = 1, … , *s*. Тому за припущенням індукції знайдеться натуральне *М* таке, що *М* < *p*′1 … *p*′*s*та rest(*M*, *p*′*i*) = *a*′*i* для всіх *i* = 1, …, *s*. Звідси маємо *М* < *p*1 … *ps*+1, *rest*(*M*, *pi*) = *ai*для всіх *i* = 3, … , *s* + 1 та *rest*(*M*, *p*1⋅*p*2) = *M*0. Остання рівність означає, що *М* = *β*⋅*p*1⋅*p*2 + *М*0 для деякого *β*. Звідси маємо

*rest*(*M*, *p*1) = *rest*(*M*0, *p*1) = *a*1, *rest*(*M*, *p*2) = *rest*(*M*0, *p*2) = *a*2.

**Теорема 4.3.** Для будь-якої послідовності *a*0, … , *an*натуральних чисел існує число *x*∈*N* таке, що ***Г***(*x*, *i*) = *ai*, *i* = 0, 1, … , *n*.

Доведення. Нехай *R* таке число, що числа 1 + (*i* + 1)*R*, *i* = 0, … , *n* попарно прості і *ai* <1 + (*i* + 1)*R* для всіх *i* = 0, … , *n*. Тоді за попередньою теоремою існує число *L* таке, що *rest*(*L*, 1 + (*i* + 1)*R*) = *ai*для всіх *i* = 0, … , *n*. Покладемо *x* = ***c***(*L*, *R*). Тоді

***Г***(*x*, *i*) = *rest*(***l***(*x*), 1 + (*i* + 1)***r***(*x*)) =

*rest*((***l***(***c***(*L*, *R*)), 1+ (*i* + 1)***r***(***c***(*L*, *R*))) =

*rest*(*L*, 1 + (*i* + 1)*R*) = *ai*

для всіх *i* = 0, … , *n* і теорема доведена.

Залишилось знайти число *R*. Таким числом є число *R* = (1 + *n* + *a*0 + … + *an*)!. Дійсно, *ai* < 1 + (*i* + 1)*R* для всіх *i* = 0, … , *n*. Крім того числа 1 + (*i* + 1)*R* будуть попарно простими. Справді, припустимо супротивне: існує просте *q* > 1 таке, що для деяких *i*, *j* таких, що *j* > *i*, 1 + (*i* + 1)*R* та 1 + (*j* + 1)*R* діляться на *q*. Але *j* – *i* ≤ *n*, тому *j* – *i* входить як множник в число *R*. Тому *R* ділиться на *q*, а отже *R* = *γq*. Звідси

1 + (*i* + 1)*R* = 1 + (*i* + 1)*γq* та 1 + (*j* + 1)*R* = 1 + (*j* + 1)*γq*

не діляться на *q*, а це суперечить припущенню. Теорему доведено.

Функція Геделя разом з деякими іншими функціями утворює розширення множини базових функцій, яке дозволяє промоделювати операцію примітивної рекурсії.

**Теорема** **4.4** (про моделювання примітивної рекурсії). Якщо функція виникає за схемою примітивної рекурсії із функцій *g*, *h*, то її значення в будь-якій точці може бути обчислене всюди визначеним алгоритмом через значення функцій *g*, *h*, ***Г***.

Доведення. Доводимо для випадку, коли *f* – функція двох змінних (в загальному випадку доведення аналогічне). За схемою примітивної рекурсії маємо:

*f*(*x*, 0) = *g*(*x*)

*f*(*x*, 1) = *h*(*x*, 0, *f*(*x*, 0)) (1)

………………………..

*f*(*x*, *y*) = *h*(*x*, *y* – 1, *f*(*x*, *y* – 1))

За основною властивістю функції Геделя існує таке *t*, що

***Г***(*t*, 0) = *f*(*x*, 0)

***Г***(*t*, 1) = *f*(*x*, 1)

…………… (2)

***Г***(*t*, *y*) = *f*(*x*, *y*).

Перепишемо (2) у вигляді

***Г***(*t*, 0) = *g*(*x*)

***Г***(*t*, 1) = *h*(*x*, 0, ***Г***(*t*, 0)) (3)

………………………..

***Г***(*t*, *y*) = *h*(*x*, *y* – 1, ***Г***(*t*, *y* – 1))

Тоді функція *f*(*x*, *y*) може бути обчислена алгоритмом:

function *f*(*x*, *y*)

begin

*i* = 0

*s* = 0

if *y* = 0 then

{while ⏐***Г***(*i*, 0) – *g*(*x*)⏐≠ 0

do *i* = *i* + 1

}

else {

for *j* = 1 to *y*

if ***Г***(*i*, *j*) ≠ *h*(*x*, *j* – 1, ***Г***(*i*, *j* – 1)) then *s* = 1

while ⏐***Г***(*i*, 0) – *g*(*x*)⏐+ *s* ≠ 0

do {*s* = 0

*i* = *i* + 1

for *j* = 1 to *y*

if ***Г***(*i*, *j*) ≠ *h*(*x*, *j* – 1, ***Г***(*i*, *j* – 1)) then *s* = 1

}

}

*f* = ***Г***(*i*, *y*)

end.

Теорему доведено.